Adı Soyadı: 29.04.2023

Numarası:

2022-2023 BAHAR DÖNEMİ SOYUT MATEMATİK II

ARA SINAV SORULARI

1) a) Her $a \in \mathbb{N}$ için $(183 | 13^{a+2} + 14^{2a+1})$ olup olmadığını araştırınız. (15p)

   b) $k \geq 0$ ise her $x \in \mathbb{N}^{+}$ için

$$(1+k)^x \geq 1 + k^x$$

olduğunu gösteriniz. (15p)

2) $x, y \in \mathbb{Z}$, $x > 0$, $y > 0$,

$$x > y \text{ ise } y^2 < x^2 + y$$

olduğunu gösteriniz. (20p)

3) a) Aşağıda tam sayılar ile ilgili bir sistem veriliyor. Bu sistemdeki m ve n bilinmeyenleri varsa bulunuz. (20p)

$$[4,5][m,4] + [2,1] = [3,1]$$ 10p.

$$[mn,7] = [n,12] + [2,m][1,4]$$ 10p.

   b) $(a,\ b) = 1$ ise $(a+b, a-\ b)$'nun alabileceği değerleri bulunuz. (10p)

4) a) $(L,\ \leq)$ bir kafes olsun. Bu durumda her $a, b, c \in\ L$ için

$$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \leq a \wedge (b \vee c)$$

olduğunu gösteriniz. (10p)

   b) $(A,\ \leq)$ bir Boole cebiri olsun. Bu durumda her $a, b \in\ A$ için

$$[a \wedge (b' \vee a)] \vee [a' \wedge (b \vee a')]$$

ifadesinin eşit olduğu değeri bulunuz. (10p)

BAŞARILAR

Dr. Çağla ÇELEMOĞLU

Cevap Anahtarı

1) a) Tümevarım ile gösterelim.

$a=0$ için

$$13^2+14=169+14=183 \text{ ve } 183 \mid 183 \text{ old.}$$

sağlanır.

$a=n$ için doğru olsun.

$$183 \mid 13^{n+2}+14^{2n+1} \quad \text{dir. Yani,}$$

$$13^{n+2}+14^{2n+1}=183.k \text{ oş } \exists k\in\mathbb{Z} \text{ var.}$$

$a=n+1$ için doğru old gösterelim

$$\begin{aligned}13^{n+3}+14^{2n+3} &= 13.13^{n+2}+14^2.14^{2n+1}\\ &= 13(13^{n+2}+14^{2n+1})+183.14^{2n+1}\\ &= 13.\ 183k+183.14^{2n+1}\\ &= 183(\underbrace{13k+14^{2n+1}}_{\in\mathbb{Z}})\end{aligned}$$

$$\Rightarrow 183 \mid 13^{n+3}+14^{2n+3} \quad \text{olup sağlanır}$$

1) b) x'e tümevarım uygulayalım.

$x=1$ için

$$(1+k)^1=1+k \text{ olup } 1+k \geqslant 1+k \text{ sağlanır.}$$

$x=n$ için doğru olsun. Yani,

$$(1+k)^n \geqslant 1+k^n \text{ dir.}$$

$x=n+1$ için

$$\begin{aligned}(1+k)^{n+1} = (1+k)^n(1+k) &\geqslant (1+k^n)(1+k)\\ &= 1+k+k^n+k^{n+1}\end{aligned}$$

$k\geqslant 0$

$\geq 1+k^{n+1}$

olup sağlanır.

2) $x,y \in \mathbb{Z}$, $x>0$, $y>0$ ise

$x=[a,b]$, $y=[c,d]$ ve $x>0$, $y>0$

olduğundan $a>b \wedge c>d$ o.ş $a,b,c,d \in \mathbb{N}$

vardır. O halde $a=b+k$

$c=d+r$ o.ş $k,r \in \mathbb{N}^*$ vardır

$x>y \Rightarrow [a,b]>[c,d]$

$\Rightarrow a+d>b+c$

$\Rightarrow a+d=b+c+t$ o.ş $t\in\mathbb{N}^*$ var

$\Rightarrow \cancel{b}+k+\cancel{d}=\cancel{b}+\cancel{d}+r+t \Rightarrow k=r+t$

Aksini kabul edelim. Yani $y^2 \geq x^2+y$ olsun.

$[c,d][c,d] \geq [a,b][a,b]+[c,d]$

$\Rightarrow [c^2+d^2, 2cd] \geq [a^2+b^2, 2ab]+[c,d]$

$\Rightarrow [c^2+d^2, 2cd] \geq [a^2+b^2+c, 2ab+d]$

$\Rightarrow c^2+d^2+2ab+d \geq 2cd+a^2+b^2+c$

$\Rightarrow (d+r)^2+d^2+2(b+k)b+d \geq 2(d+r)d+(b+k)^2$
$+b^2+(d+r)$

$\Rightarrow \cancel{d^2}+\cancel{2dr}+r^2+\cancel{d^2}+\cancel{2b^2}+\cancel{2bk}+\cancel{d} \geq \cancel{2d^2}+\cancel{2dr}$
$\cancel{+b^2}+k^2+\cancel{2bk}$
$\cancel{+b^2}\cancel{+d}+r$

$\Rightarrow r^2 \geq k^2+r$

$\Rightarrow r^2 \geq (r+t)^2+r$

$\Rightarrow \cancel{r^2} \geq \cancel{r^2}+2rt+t^2+r$

$\Rightarrow t^2+2rt+r \leq 0$ ($r,t\in\mathbb{N}^*$ olması ile çelişir)

3) a) $[4,5][m,4]+[2,1]=[3,1]$

$\Rightarrow [4m+20, 16+5m]+[2,1]=[3,1]$

$\Rightarrow [4m+22, 17+5m] = [3,1]$

$\Rightarrow (4m+22, 17+5m) \sim (3,1)$

$\Rightarrow 4m+23 = 20+5m$

$\Rightarrow m=3$, $3 \in \mathbb{N}$ olup m vardır

$[mn, 7] = [n, 12] + [2,m][1,4]$

$\Rightarrow [3n, 7] = [n,12]+[2,3][1,4]$

$\Rightarrow [3n, 7] = [n,12]+[14,11]$

$\Rightarrow [3n, 7] = [14+n, 23]$

$\Rightarrow (3n, 7) \sim (14+n, 23)$

$\Rightarrow 3n+23 = 21+n$

$\Rightarrow 2n = -2$

$\Rightarrow n=-1 \notin \mathbb{N}$ old böyle bir n bulunamaz. 3)'ün b'si alttaki sayfada

4) a) $(L, \leq)$ kafes olsun. i. özellikten

$b \leq b \vee c$
$c \leq b \vee c$
} yazılabilir. Ayrıca L kafes old.

$a \leq b \Rightarrow \forall x \in L$ için $a \wedge x \leq b \wedge x$ old. biliyoruz. Bu durumda

$a \wedge b \leq a \wedge (b \vee c)$
$a \wedge c \leq a \wedge (b \vee c)$ yazılır. iii. özellikten

$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \leq a \wedge (b \vee c)$ elde edilir.

4 b) $(A, \leq)$ Boole cebri olsun.

O halde $(A, \leq)$ bir kafestir. Kafes özelliklerinden

$$[a \wedge (b' \vee a)] = a$$ ve

$$[a' \wedge (b \vee a')] = a'$$ old biliyoruz.

Bu durumda

$$[a \wedge (b' \vee a)] \vee [a' \wedge (b \vee a')] = a \vee a'$$

Boole cebri iç öd. $= 1$

3 b) $(a,b) = 1$ ise $(a+b, a-b) = ?$

$(a+b, a-b) = d$ olsun.

$\Rightarrow d \mid a+b \wedge d \mid a-b$

$\Rightarrow d \mid a+b+a-b \wedge d \mid a+b-a+b$

$\Rightarrow d \mid 2a \wedge d \mid 2b$

$\Rightarrow d \mid (2a, 2b)$

$(a,b) = 1$ ise $(2a, 2b) = 2$ $(d \in \mathbb{Z}^+)$

$\Rightarrow d \mid 2$ $\Rightarrow d = 1$ veya $d = 2$ olabilir